Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 6

Abgabe: Montag, den 03. Juni 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 6.1 (*4 Punkte*)

(a) Schreiben Sie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 5 & 9 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_9$$

als Produkt disjunkter Zykel und als Produkt von Transpositionen. Bestimmen Sie $\operatorname{sign}(\sigma)$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma, \tau \in S_n$ kommutieren, wenn σ und τ disjunkt sind.

(c) Seien $\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S_n$, sodass $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ paarweise disjunkt sind. Zeigen Sie, dass $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ und τ genau dann disjunkt sind, wenn für alle $1 \leq i \leq m$ die Permutationen τ und α_i disjunkt sind.

Aufgabe 6.2 (*4 Punkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$

(a) Zeigen Sie, dass $|S_n| = n!$ gilt.

Hinweis: Sie können eine Induktion nach n führen, indem sie für $\sigma \in S_n$ ein $\tau \in S_n$ finden, sodass $\tau\sigma$ ein Element von S_{n-1} ist.

(b) Sei $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_m)$ ein m-Zykel in S_n. Zeigen Sie, dass $\sigma^{-1} = (i_m i_{m-1} \cdots i_1)$ gilt.

Aufgabe 6.3 (*4 Punkte*)

In der Vorlesung wurde bereits bewiesen, dass jedes $\sigma \in S_n$ sich als Produkt von Zykeln mit paarweise disjunkten Trägern darstellen lässt. Zeigen Sie, dass diese Darstellung bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist.

Aufgabe 6.4 (*4 Punkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\tau^{n!} = \mathrm{id}$ für alle $\tau \in S_n$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie erst den Fall, in welchem τ eine Transposition ist.